

۳۰ نمونه سوال اتحاد چاق و لاغر

همراه با پاسخ تشریحی و نکات طلایی (ساده، متوسط، پیشرفته)

سوالات ساده (۱ تا ۱۰)

سوال ۱ – تجزیه: $x^3 + 64$

→ جمع → فرمول مجموع مکعبها $x^3 + 64 = (x + 4)(x^2 - 4x + 16)$

پاسخ: $(x + 4)(x^2 - 4x + 16)$

نکته: $4^3 = 64$ رو باید سریع تشخیص بدی.

سوال ۲ – تجزیه: $27y^3 - 1$

→ تفریق → فرمول تفاضل مکعبها $27y^3 - 1 = (3y - 1)(9y^2 + 3y + 1)$

پاسخ: $(3y - 1)(9y^2 + 3y + 1)$

نکته: یادت باشه $(3y)^2 = 9y^2$ ، نه $3y^2$.

سوال ۳ – کامل کردن عبارت: $a^3 + 27 = (a + 3)(\dots)$

$$a^3 + 27 = (a + 3)(a^2 - 3a + 9)$$

نکته: جمله آخر همیشه b^2 است، نه b .

سوال ۴ – تشخیص: آیا $x^3 + x^2$ با اتحاد چاق و لاغر تجزیه می‌شود؟

خیر. x^2 مکعب کامل نیست (توان ۲ داره).

$$(x + 1)^2 \text{ عامل مشترک بگیری: } x$$

سوال ۵ — تجزیه: $125a^3 + 8b^3$

$$(5a)^3 + (2b)^3 = (5a + 2b)(25a^2 - 10ab + 4b^2)$$

نکته: $(5a)^2 = 25a^2$ و $(2b)^2 = 4b^2$

سوال ۶ — تجزیه: $m^3 - 216n^3$

$$(m)^3 - (6n)^3 = (m - 6n)(m^2 + 6mn + 36n^2)$$

سوال ۷ — ساده سازی: $(x^3 - 27) / (x - 3)$

حذف می شه $(x - 3)$ عامل مشترک $\rightarrow (x^2 + 3x + 9)$ صورت: $x(x - 3)$

پاسخ: $x^2 + 3x + 9$

سوال ۸ — تجزیه: $64x^3 + 125y^3$

$$(4x)^3 + (5y)^3 = (4x + 5y)(16x^2 - 20xy + 25y^2)$$

سوال ۹ — تشخیص: آیا $x^6 - y^3$ اتحاد چاق و لاغر است؟

بله. $x^6 = (x^2)^3$

پاسخ: $(x^2 - y)(x^4 + x^2y + y^2)$

سوال ۱۰ — تجزیه: $1000p^3 - 343q^3$

$$(10p)^3 - (7q)^3 = (10p - 7q)(100p^2 + 70pq + 49q^2)$$

سوالات متوسط (۱۱ تا ۲۰)

سوال ۱۱ — چند مرحله‌ای: $x^6 - 64$

$$\begin{aligned} &= (x^3)^2 - 8^2 = (x^3 - 8)(x^3 + 8) \\ &= (x - 2)(x^2 + 2x + 4)(x + 2)(x^2 - 2x + 4) \end{aligned}$$

سوال ۱۲ — ترکیب با اتحاد مزدوج: $x^6 - y^6$

$$\begin{aligned} &= (x^3)^2 - (y^3)^2 = (x^3 - y^3)(x^3 + y^3) \\ &= (x - y)(x^2 + xy + y^2)(x + y)(x^2 - xy + y^2) \end{aligned}$$

سوال ۱۳ — ساده‌سازی: $(a^3 + b^3) / (a^2 - ab + b^2)$

$$(\rightarrow \text{عامل مشترک حذف می‌شود}) \quad a^2 - ab + b^2 \text{ صورت: } a(a + b)$$

پاسخ: $a + b$

سوال ۱۴ — عامل‌گیری اولیه: $2x^3 + 16y^3$

$$= 2(x^3 + 8y^3) = 2(x + 2y)(x^2 - 2xy + 4y^2)$$

سوال ۱۵ — جایگذاری مرکب: $(x + 1)^3 - (x - 1)^3$

$$\begin{aligned} &a = x + 1, b = x - 1 \rightarrow a - b = 2 \\ &a^2 + ab + b^2 = (x^2 + 2x + 1) + (x^2 - 1) + (x^2 - 2x + 1) = 3x^2 + 1 \end{aligned}$$

$$\text{پاسخ: } 2(3x^2 + 1) = 6x^2 + 2$$

سوال ۱۶ — ساده‌سازی: $(8x^3 - 27) / (4x^2 + 6x + 9)$

$$\text{عامل مشترک حذف می‌شود} \rightarrow 4x(2x - 3) \text{ صورت: } 2 + 6x + 9$$

پاسخ: $2x - 3$

سوال ۱۷ — حل معادله: $x^3 - 8 = 0$

$$(x - 2)(x^2 + 2x + 4) = 0 \rightarrow x = 2 \text{ یا } x^2 + 2x + 4 = 0 (\Delta < 0)$$

پاسخ: $x = 2$

سوال ۱۸ — تجزیه: $a^3b^3 + 8c^3$

$$(ab)^3 + (2c)^3 = (ab + 2c)(a^2b^2 - 2abc + 4c^2)$$

سوال ۱۹ — چندمرحله‌ای: $(x^4 + x^2 + 1) / (x^2 + x + 1)$

$$x^4 + x^2 + 1 = (x^2 + 1)^2 - x^2 = (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)$$

پاسخ: $x^2 - x + 1$

سوال ۲۰ — ترکیبی: اگر $a + b = 4$ و $ab = 1$ ، مقدار $a^3 + b^3$ را بیابید.

$$a^3 + b^3 = (a + b)^3 - 3ab(a + b) = 64 - 3(1)(4) = 64 - 12 = 52$$

سوالات پیشرفته (۲۱ تا ۳۰)

سوال ۲۱ — امتحان نهایی: $x^3 - 3x^2 + 3x - 1 + y^3$

$$\begin{aligned} x^3 - 3x^2 + 3x - 1 &= (x - 1)^3 \\ (x - 1)^3 + y^3 &= (x - 1 + y)((x - 1)^2 - (x - 1)y + y^2) \\ &= (x + y - 1)(x^2 - 2x + 1 - xy + y + y^2) \end{aligned}$$

سوال ۲۲ — کنکوری: $1 / (x^2 + x + 1) + 1 / (x^2 - x + 1)$

$$\begin{aligned} 1 / (x^2 + x + 1) + 1 / (x^2 - x + 1) &= x^4 + x^2 + 1 \\ &= (x^2 - x + 1) + (x^2 + x + 1) = 2x^2 + 2 \end{aligned}$$

پاسخ: $(2x^2 + 2) / (x^4 + x^2 + 1)$

سوال ۲۳ — ترکیبی پیچیده: $(2a - b)^3 - (a - 2b)^3$

$$A = 2a - b, B = a - 2b \rightarrow A - B = a + b$$

$$A^2 + AB + B^2 = (4a^2 - 4ab + b^2) + (2a^2 - 5ab + 2b^2) + (a^2 - 4ab + 4b^2) = 7a^2 - 13ab + 7b^2$$

پاسخ: $(a + b)(7a^2 - 13ab + 7b^2)$

سوال ۲۴ — حل معادله درجه شش: $x^6 - 9x^3 + 8 = 0$

$$u = x^3 \rightarrow u^2 - 9u + 8 = 0 \rightarrow (u - 1)(u - 8) = 0$$

$$u = 1 \rightarrow x = 1 \mid u = 8 \rightarrow x = 2$$

سوال ۲۵ — امتحان نهایی: ساده کنید $(x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz) / (x + y + z)$

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx)$$

پاسخ: $x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx$

سوال ۲۶ — کنکوری: اگر $x + (1/x) = 3$ ، مقدار $x^3 + (1/x^3)$ را بیابید.

$$x^3 + (1/x^3) = (x + (1/x))^3 - 3(x + (1/x)) = 27 - 9 = 18$$

سوال ۲۷ — تجزیه پیشرفته: $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$

$$= (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)$$

نکته: این یکی از مهم‌ترین اتحادهای ترکیبیه.

سوال ۲۸ — ساده‌سازی کسری: $(x^9 - y^9) / (x^3 - y^3)$

$$(x^9 - y^9) / (x^3 - y^3) = (x^3 - y^3)(x^6 + x^3y^3 + y^6) / (x^3 - y^3) \rightarrow \text{عامل مشترک حذف می‌شود}$$

پاسخ: $x^6 + x^3y^3 + y^6$

سوال ۲۹ — ترکیب با اتحاد مربع‌ها: $x^6 - y^6$

$$= (x^3 - y^3)(x^3 + y^3) = (x - y)(x + y)(x^2 + xy + y^2)(x^2 - xy + y^2)$$

سوال ۳۰ — سوال ترکیبی نهایی: $x^3 - 6x^2 + 12x - 8$

$$= (x - 2)^3$$

نکته: این اتحاد مکعب دوجمله‌ای است، نه چاق و لاغر؛ برای این آورده شده تا تفاوت آن را با اتحادهای دیگر تشخیص دهید.